MATEMÁTICAS 1º BACHILLERATO SOCIALES

RECUPERACIÓN FUNCIONES **Febrero 2006**

1. Dadas las funciones:

$f(x) = \sqrt{x+2}$ $\quad g(x) = \dfrac{3}{x-1}$ $\quad h(x) = x^2 - 3$

Calcula:

a) $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $g \circ h$

b) f^{-1},

2. Representa gráficamente la función $y = 2^x$ y escribe sus características. A partir de la gráfica anterior, representa razonadamente las funciones: $y = 2^x - 1$, $y = 2^{x-2}$, $y = 2^{-x}$

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < -2 \\ x^2 - 3 & si\ -2 < x < 1 \\ 3x - 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$, represéntala gráficamente y **estudia** su continuidad.

4.- Dada la función $y = \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 - 4}$

a) Halla su dominio.
b) Estudia su continuidad
c) Halla sus asíntotas.
d) Haz un esbozo de su gráfica.

5.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$. Calcula su límite en los puntos:

a) x = 2 b) x = 1 c) x = 0 d) $x \to +\infty$ e) $x \to -\infty$

PUNTUACIÓN: 2 puntos cada ejercicio

SOLUCIONES

1.- $f(x) = \sqrt{x+2}$ $\quad g(x) = \dfrac{3}{x-1}$ $\quad h(x) = x^2 - 3$

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\dfrac{3}{x-1}\right] = \sqrt{\dfrac{3}{x-1} + 2} = \sqrt{\dfrac{1+2x}{x-1}}$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left[\sqrt{x+2}\right] = \dfrac{3}{\sqrt{x+2} - 1}$

$(f \circ h)(x) = f[h(x)] = f\left[x^2 - 3\right] = \sqrt{x^2 - 3 + 2} = \sqrt{x^2 - 1}$

$(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g\left[x^2 - 3\right] = \dfrac{3}{x^2 - 3 - 1} = \dfrac{3}{x^2 - 4}$

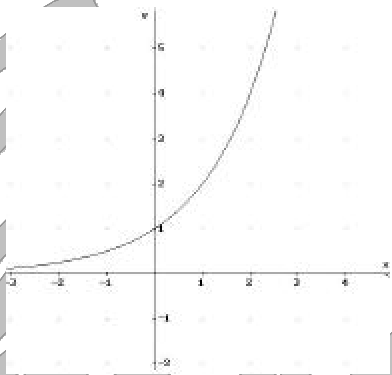
b) $f(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow y = \sqrt{x+2} \rightarrow x = \sqrt{y+2} \Rightarrow x^2 = y + 2 \Rightarrow y = x^2 - 2$

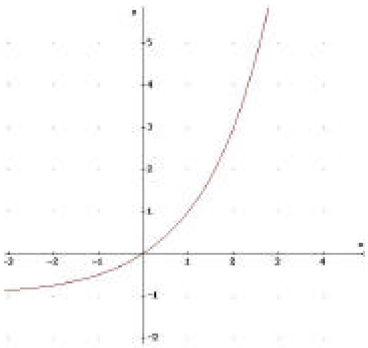
$\rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2$ Comprobación: $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(x^2 - 2\right) = \sqrt{x^2 - 2 + 2} = x$

$g(x) = \dfrac{3}{x-1} \Rightarrow y = \dfrac{3}{x-1} \rightarrow x = \dfrac{3}{y-1} \Rightarrow x(y-1) = 3 \Rightarrow xy - x = 3 \Rightarrow xy = x + 3 \Rightarrow$

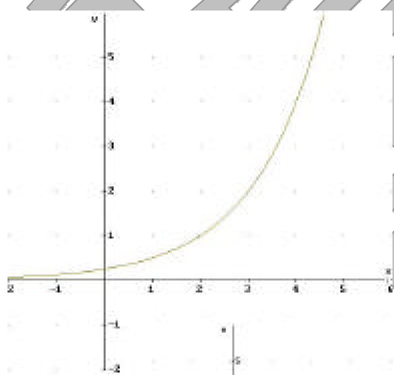
$y = \dfrac{x+3}{x} \Rightarrow g^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x}$ Comprobación: $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(\dfrac{x+3}{x}\right) = \dfrac{3}{\dfrac{x+3}{x} - 1} = \dfrac{3}{\dfrac{3}{x}} = x$

2.- Características de la función exponencial de base 2 ($y = 2^x$):
Dominio R, continua en R, creciente, pasa por (0,1), asíntota horizontal por la izquierda el eje OX.
Gráfica:



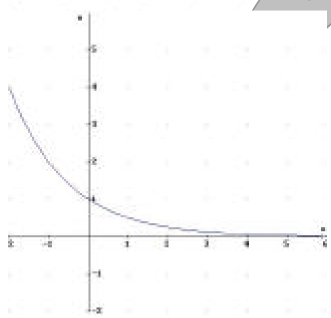


La gráfica de la función $y = 2^x - 1$ será la anterior desplazada 1 unidad hacia la abajo.



La gráfica de la función $y = 2^{x-2}$ será la de la función $y = 2^x$ desplazada 2 unidades hacia la derecha.

Y, por último, la gráfica de $y = 2^{-x}$ es la simétrica respecto del eje OY de la función primera, es decir:



3.- $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < -2 \quad semirrecta\ horizontal,\ continua \\ x^2 - 3 & si -2 < x < 1 \quad trozo\ de\ parábola,\ continua \\ 3x - 1 & si\ x \geq 1 \quad semirrecta,\ continua \end{cases}$

habrá que estudiar qué pasa en los puntos de "enganche", –2 y 1.

En –2 :

$f(-2) = no\ existe$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2}(1) = 1$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2}(x^2 - 3) = 4 - 3 = 1$

En 1:

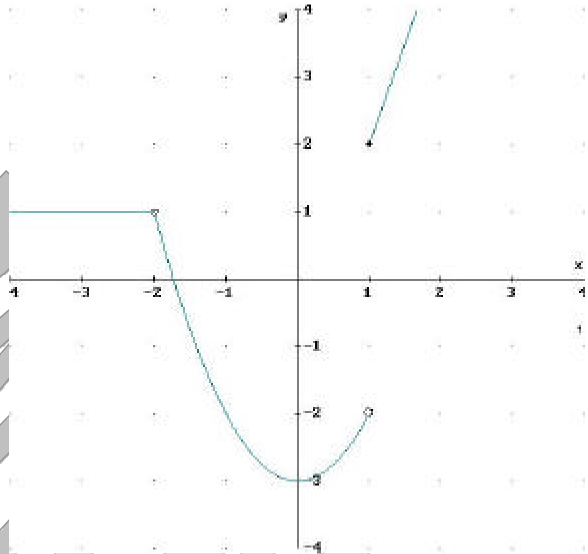
$f(1) = 3 - 1 = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 3) = -2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(3x - 1) = 2$

La función es continua en $R - \{-2,1\}$, en el punto –2 tiene una discontinuidad evitable y en 1 una discontinuidad de salto.

Gráfica:



Parábola: mira hacia arriba

Vértice (0,-3)

Corta eje OY en –3

Corta eje OX:

$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

4.- Dada la función $y = \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 - 4}$

a) Dominio: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow Dom(f) = R - \{-2,2\}$

b) Estudia su continuidad: es continua en su dominio, es decir en $R - \{-2,2\}$

c) Halla sus asíntotas:

Verticales: el denominador se anula en –2 y 2 (posibles A.V.), veamos

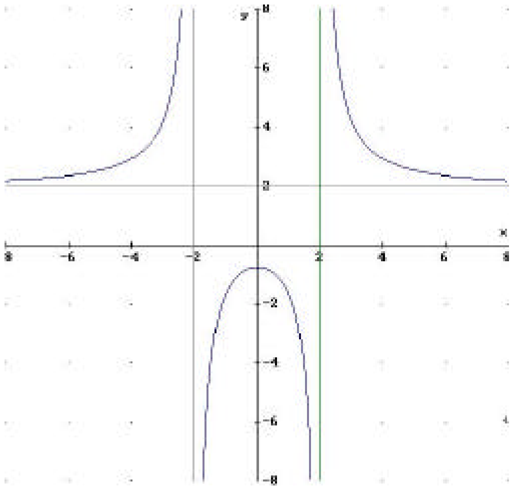
$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{11}{0} = \infty \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = \dfrac{11}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = \dfrac{11}{0^+} = +\infty \end{cases}$$ A.V. x = 2 ramas divergentes

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{11}{0} = \infty \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = \dfrac{11}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = \dfrac{11}{0^-} = -\infty \end{cases}$$ A.V. x =-2 ramas divergentes

Horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ es A. Horizontal } \begin{cases} x = 1000 \to y = 2'000011 \\ x = -1000 \to y = 2'000011 \end{cases}$$ por arriba

d) Gráfica aproximada:



$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$$

5.-a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}=\frac{4-4}{4-6+2}=\frac{0}{0}$ (IND) factorizamos y simplificamos:

, $x^2-3x+2=0 \to x=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\left\langle\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right. \to$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-1}=\frac{2}{1}=2$$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}=\frac{1-2}{1-3+2}=\frac{-1}{0}=\infty\left\langle\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty\end{matrix}\right.$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}=\frac{0}{2}=0$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}=\frac{1}{1}=1$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}=\frac{1}{1}=1$